

---

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

M. CICOGNANI

LA PROPAGAZIONE DELLE SINGOLARITA' GEVREY NEL PROBLEMA DI  
CAUCHY PER OPERATORI IPERBOLICI CON COEFFICIENTI HÖLDERIANI IN  $t$  E  
DI CLASSI DI GEVREY IN  $x$

5 MARZO 1987

# IL PROBLEMA DI CAUCHY

Vari autori hanno considerato il problema di Cauchy per operatori con parte principale iperbolica e coefficienti hölderiani in  $t$  e di classe di Gevrey in  $x \in \mathbb{R}^n$ , provandone la buona positura in opportuni spazi di Gevrey di funzioni ed ultradistribuzioni. I primi risultati in questa direzione sono stati ottenuti in [C. De G.S.] e [C.J.S.] per operatori del secondo ordine con coefficienti hölderiani dipendenti solo da  $t$ , sono stati estesi in [N] ad operatori con coefficienti dipendenti anche da  $x$  e recentemente ad operatori di ordine superiore in [O.T.].

Il risultato che riguarda più da vicino la presente esposizione è il seguente teorema.

Teorema 1. [C. De G.S.], [N]. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(C.P.) \quad \begin{cases} P(t,x;D_t,D_x)u(t,x) = f(t,x) \\ D_t^j u(0,x) = g_j(x) \quad j=0,1 \end{cases}$$

$$\text{in } [0,T] \times \mathbb{R}_x^n \text{ per } P(t,x;D_t,D_x) = D_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) D_{x_i} D_{x_j} + b(t,x) D_t + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) D_{x_i} + d(t,x), \quad D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Assumiamo le seguenti ipotesi:

$$(R_x) \quad a_{ij}, b, c_i, d \in C([0,T]; G^{(\sigma)}(\mathbb{R}_x^n))$$

$$0 < \exists \chi < 1: \frac{a_{ij}(t,x) - a_{ij}(s,x)}{(t-s)^\chi} \in G^{(\sigma)}(\mathbb{R}_x^n) \text{ uniformemente per } (t,s) \in [0,T]^2, t \neq s.$$

$$(S.H) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2 \quad (\delta > 0)$$

$$(W.P.) \quad 1 < \sigma < (1-\chi)^{-1}.$$

Allora se denotiamo con  $V^{(\sigma)}$  lo spazio delle funzioni Gevrey  $G^{(\sigma)}(R^n)$  o lo spazio di ultradistribuzioni  $G^{(\sigma)'}(R^n)$  vale la seguente affermazione:

- (i)  $\forall g_0, g_1 \in V^{(\sigma)}, \forall f \in C([0, T]; V^{(\sigma)}) \exists$  una ed una sola  $u \in C^2([0, T]; V^{(\sigma)})$  soluzione di (C.P.).

Vale inoltre il seguente risultato di ottimalità per l'ipotesi (WP):

- (ii)  $\forall \sigma > 1, 0 < \chi < 1$ , tali che  $\sigma > (1-\chi)^{-1} \exists a(t) \in C^{0,\chi}([0, T]), a(t) \geq c > 0$  ed  $\exists g_0, g_1 \in G^{(\sigma)}(R)$  tali che il problema

$$\begin{cases} (D_t^2 - a(t)D_x^2)u(t, x) = 0 \\ D_t^j u(0, x) = g_j(x) \end{cases}$$

non ha soluzioni in  $C^2([0, t_0]; G^{(\sigma)}(R)) \quad \forall t_0 \in (0, T]$ .

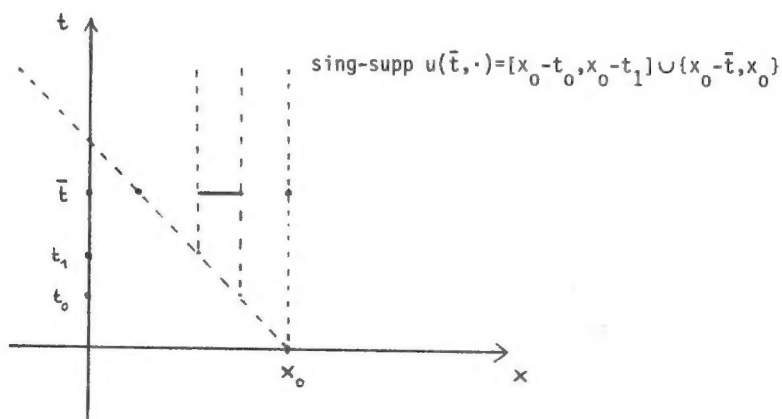
In tutti i lavori citati, tranne [O.T.], i risultati sono stati ottenuti col metodo delle stime dell'energia della soluzione. In [O.T.] viene costruita una parametrica per il problema di Cauchy con metodi che si ispirano a quelli usati in [B].

La propagazione delle singolarità Gevrey della soluzione non è stata trattata dagli autori sopra citati; infatti questo aspetto del problema di Cauchy iperbolico in classi di Gevrey è generalmente studiato per operatori con coefficienti in  $G^{(\sigma)}([0, T] \times R_x^n)$ , cioè egualmente regolati in  $t$  ed  $x$ , si vedano ad esempio [W], [Mz], [T], [M.T.]. Volendo trattare operatori con coefficienti irregolari in  $t$ , la prima cosa da verificare è se il fronte d'onda spaziale  $W_\sigma(u(\bar{t}, \cdot))$  della soluzione  $u$  ad un tempo fissato  $\bar{t}$  possa risentire o meno delle singolarità rispetto a  $t$  dei coefficienti in istanti precedenti  $\bar{t}$ . Tra

Alcuni esempi si vede che la risposta è affermativa. In figura è rappresentato l'insieme  $\text{sing-supp } u(\bar{t}, \cdot)$  per  $u(t, x)$  soluzione di

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_t \partial_x + b(t) \partial_t) u(t, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x \\ u(0, x) = 0 \\ \partial_t u(0, x) = \delta(x - x_0) \end{cases}$$

con  $b(t) \in C(\mathbb{R}_t^+)$ ,  $\text{sing-supp } b = [t_0, t_1]$ .



In [C] si trova la discussione di una classe di questi esempi e vengono stimate esattamente le interferenze tra singolarità in  $t$  dei coefficienti e singolarità in  $x$  della soluzione.

RISULTATI PRINCIPALI

Introduciamo alcune classi di simboli di ordine finito simili a quelle considerate in [T] e [MT] e una classe di simboli di ordine infinito simile a quella studiata in [CZ].

Definizione. Sia  $\sigma > 1$ ,  $\mu \in [1, \sigma]$ . Diremo che un simbolo  $a(x, \xi)$  è in  $S^{m, \sigma, \mu}$  se vale

$$|D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} a(x, \xi)| \leq C A^{|\alpha|+|\beta|} |\alpha! \beta!|^{\sigma} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{per } |\xi| > B |\alpha|^{\sigma} + B_0$$

con costanti  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ,  $B_0 > 0$ ,  $C \geq 0$ ,  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ .

Diremo che appartiene ad  $R^{\sigma}$  se

$$|D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} a(x, \xi)| \leq C_{\alpha} A^{|\beta|} |\beta!|^{\sigma} \exp(-h \langle \xi \rangle^{1/\sigma}) \quad \text{per } |\xi| > B_0$$

con  $C_{\alpha} \geq 0$ ,  $A \geq 0$ ,  $h > 0$ ,  $B_0 > 0$ .

Diremo che appartiene alla classe  $S^{\infty, \sigma, \mu}$  se  $\forall \epsilon > 0$

$$|D_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} a(x, \xi)| \leq C_{\epsilon} A^{|\alpha|+|\beta|} |\alpha! \beta!|^{\sigma} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \exp(\epsilon \langle \xi \rangle^{1/\sigma}) \quad \text{per } |\xi| > B |\alpha|^{\sigma} + B_0$$

con  $A, B, B_0$  indipendenti da  $\epsilon$ .

Inoltre per  $0 < \chi < 1$ ,  $C^{\chi}([0, T]; S^{m, \sigma, \mu})$  denota lo spazio degli  $a(t, x, \xi)$  tali che  $a(t, x, \xi) \in C([0, T]; S^{m, \sigma, \mu})$  e

$$\frac{a(t, x, \xi) - a(s, x, \xi)}{(t-s)^{\chi}} \in S^{m, \sigma, \mu} \quad \text{uniformemente in } (t, s) \in [0, T]^2, t \neq s,$$

e per  $\mathcal{J}$  insieme aperto di  $[0, T]_{\Gamma}^{(\sigma)}$  ( $\mathcal{J}; S^{m, \sigma, \mu}$ ) denota lo spazio degli  $a(t, x, \xi)$  tali che  $\forall K \subset \mathcal{J}, K$  compatto, vale

$$|D_t^\gamma D_x^\alpha D_\xi^\beta a(t, x, \xi)| \leq C_K A^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \alpha!^\mu \beta!^\sigma \gamma!^\sigma \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|} \quad \text{per } t \in K,$$

$|\xi| > B|\alpha|^\sigma + B_0$  con  $A, B, B_0$  indipendenti da  $K$ . Infine  $\Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{S}; S^{\infty, \sigma, \mu})$  denota lo spazio degli  $a(t, x, \xi)$  tali che  $\forall K \subset \mathcal{S}$  compatto e  $\forall \varepsilon > 0$  si ha

$$|D_t^\gamma D_x^\alpha D_\xi^\beta a(t, x, \xi)| \leq C_{K, \varepsilon} A^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \alpha!^\mu \beta!^\sigma \gamma!^\sigma \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \exp(\varepsilon \langle \xi \rangle^{1/\sigma})$$

per  $t \in K$ ,  $|\xi| > B|\alpha|^\sigma + B_0$  con  $A, B, B_0$  indipendenti da  $K$  ed  $\varepsilon$ .

Quando  $B=0$  nelle precedenti definizioni scriveremo  $S^{m, \sigma, \mu}$  ed  $S^{\infty, \sigma, \mu}$  in luogo di  $S^{m, \sigma, \mu}$  ed  $S^{\infty, \sigma, \mu}$ .

Possiamo ora enunciare i risultati principali di questa esposizione.

## Teorema 2. Il problema di Cauchy

$$(C.P.)_\psi \quad \begin{cases} P(t, x; D_t, D_x) u(t, x) = f(t, x) \\ D_t^j u(0, x) = g_j(x) \quad , \quad j=0, 1 \end{cases}$$

in  $[0, T] \times \mathbb{R}_x^n$  per  $P(t, x; D_t, D_x) = D_t^2 + a_1(t, x, D_x) D_t + a_2(t, x, D_x) + b_0(t, x, D_x) D_t + b_1(t, x, D_x) + c_0(t, x, D_x)$  nelle ipotesi seguenti

$$(R_x)_\psi \quad a_j(t, x, \xi) \in C^X([0, T]; S^{j, \sigma, 1}) \quad , \quad j = 1, 2$$

$$b_j(t, x, \xi), c_j(t, x, \xi) \in C([0, T]; S^{j, \sigma, 1})$$

$$(S.H.)_\psi \quad \tau^2 + a_1(t, x, \xi) \tau + a_2(t, x, \xi) = (\tau - \lambda_1(t, x, \xi))(\tau - \lambda_2(t, x, \xi)) \text{ con } \lambda_j(t, x, \xi) \text{ reali,}$$

$$\lambda_j(t, x, \xi) \in C^X([0, T]; S^{1, \sigma, 1}) \text{ tali che } |\lambda_1(t, x, \xi) - \lambda_2(t, x, \xi)| > \delta |\xi|$$

per  $|\xi| > B_0$

può essere ricondotto al seguente problema per un sistema

$$(C.P.)_S \quad \begin{cases} L(t, x; D_t, D_x)U = F(t, x) \\ U(0, x) = G(x) \end{cases}$$

$$L = D_t - \begin{bmatrix} \lambda_1(t, x, D_x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t, x, D_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(t, x, D_x) & c_{12}(t, x, D_x) \\ c_{21}(t, x, D_x) & c_{22}(t, x, D_x) \end{bmatrix}$$

con  $c_{ij} \in C([0, T]; S^{(1-x), \sigma, 1})$ .

Se  $a_j, b_j, c_j \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{A}; S^{j, \sigma, 1})$  allora  $c_{ij} \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{A}; S^{(1-x), \sigma, \sigma})$  per  $\mathcal{A}$  aperto di  $[0, T]$ .

Teorema 3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(C.P.)_S \quad \begin{cases} L(t, x; D_t, D_x)U(t, x) = F(t, x) \\ U(0, x) = G(x) \end{cases}$$

$$\text{per } L = D_t - \begin{bmatrix} \lambda_1(t, x, D_x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t, x, D_x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(t, x, D_x) & c_{12}(t, x, D_x) \\ c_{21}(t, x, D_x) & c_{22}(t, x, D_x) \end{bmatrix}$$

Assumiamo che valga una delle due seguenti alternative

- (I)<sub>1</sub>  $\lambda_1(t, x, \xi)$  e  $\lambda_2(t, x, \xi)$  reali e della forma  $\lambda_1(t, x, \xi) = \alpha(t)\mu_1(x, \xi)$   
 $\lambda_2(t, x, \xi) = \alpha(t)\mu_2(x, \xi)$  con  $\alpha(t) \geq c > 0$ ,  $\alpha \in C([0, T])$ ,  
 $\mu_1, \mu_2 \in S^{1, \sigma, 1}$  omogenei tali che

$$\{\mu_1, \mu_2\} = a(\mu_1 - \mu_2)$$

$$\text{con } \{\mu_1, \mu_2\} = \nabla_x \mu_1 \cdot \nabla_\xi \mu_2 - \nabla_x \mu_2 \cdot \nabla_\xi \mu_1, \text{ a costante ;}$$

$$(I)_2 \quad \lambda_1(t, x, \xi) \text{ e } \lambda_2(t, x, \xi) \text{ reali e della forma } \lambda_1(t, x, \xi) = \alpha_1(t) \mu(x, \xi)$$

$$\lambda_2(t, x, \xi) = \alpha_2(t) \mu(x, \xi) \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in C([0, T]), \alpha_1(t) - \alpha_2(t) \geq c > 0,$$

$$\mu \in \mathcal{S}^{1, \sigma, 1}, \quad \mu \text{ omogeneo.}$$

Assumiamo inoltre

$$(S.H.)_S \quad |\lambda_1(t, x, \xi) - \lambda_2(t, x, \xi)| \geq \delta |\xi| \quad \text{per } |\xi| > B_0$$

$$(R) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{J}; \mathcal{S}^{1, \sigma, 1}), \quad c_{ij} \in C([0, T]; \mathcal{S}^{q, \sigma, 1}) \cap \Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{J}; \mathcal{S}^{q, \sigma, 1})$$

$$\text{con } 0 < q < 1, \quad \mathcal{J} \text{ aperto di } [0, T];$$

$$(W.P.)_S \quad 1 < \sigma < q^{-1}.$$

Allora se  $F(t, x) \in C([0, T]; G^{(\sigma)}(R_x^n))$  e  $G(x) \in G_0^{(\sigma)'}(R_x^n)$  per la soluzione  $U(t, x)$  di (C.P.)<sub>S</sub> vale

$$WF_\sigma(U(t, \cdot)) \subset \overline{\bigcup_{v=0}^{\infty} \Gamma_v^t(\mathcal{J})}$$

con gli insiemi  $\Gamma_v^t(\mathcal{J})$  definiti come segue:

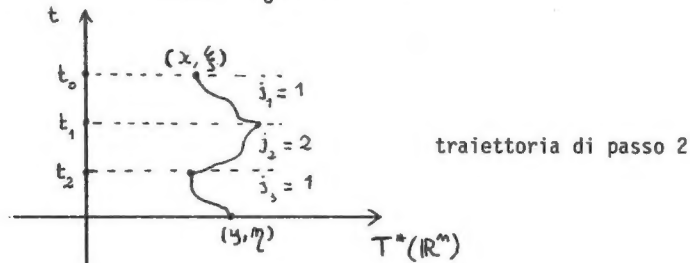
$$\Gamma_v^t(\mathcal{J}) = \{\text{punti finali delle traiettorie di passo } v \text{ con diramazioni in } [0, T] \setminus \mathcal{J}\}^{\text{con}}.$$



Una traiettoria di passo  $v$  con diramazioni in  $t_1, t_2, \dots, t_v \in [0, T] \setminus \mathcal{J}$ ,  $t = t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_v \geq t_{v+1} = 0$ , è una curva continua  $(x(\tau), \xi(\tau))$  che in ciascun intervallo  $[t_h, t_{h-1}]$  per  $h=1, \dots, v+1$  risolve le equazioni

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_{\xi} \lambda_{j_h}(\tau, x, \xi), \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \nabla_x \lambda_{j_h}(\tau, x, \xi), \quad j_h \in \{1, 2\}, j_h \neq j_{h+1},$$

con punto iniziale  $(y, \eta) \in \text{WF}_0(G)$  per  $\tau=0$ .



Col teorema 2 si riottengono i risultati di buona positura enunciati nel teorema 1. Per mezzo del teorema 3 otteniamo stime del fronte d'onda  $\text{WF}_{\sigma}(u(t, \cdot)) \cup \text{WF}_{\sigma}(D_t u(t, \cdot))$  della soluzione di  $(\text{C.P.})_{\psi}$  e della sua derivata se le radici caratteristiche di  $P$  soddisfano le ipotesi  $(\text{S.H.})_{\psi}$  ed una tra  $(I)_1$  e  $(I)_2$ . Infatti se  $(\text{C.P.})_S$  è il problema derivato da  $(\text{C.P.})_{\psi}$  tramite il teorema 2, si ha  $\text{W}_{\sigma}(G) = \text{WF}_{\sigma}(g_0) \cup \text{WF}_{\sigma}(g_1)$  e  $\text{WF}_{\sigma}(u(t, \cdot)) = \text{WF}_{\sigma}(u(t, \cdot)) \cup \text{WF}_{\sigma}(D_t u(t, \cdot))$ . Il risultato di propagazione qui stabilito si applica ad operatori differenziali strettamente iperbolici con parte principale del tipo

$$D_t^2 - \alpha(t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j}$$

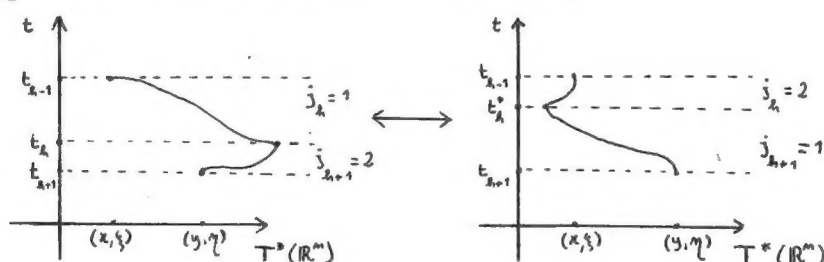
e soddisfacenti le ipotesi  $(R)_{\chi}$ ,  $(\text{S.H.})$ ,  $(\text{W.P.})$  del teorema 1; come  $\mathcal{J}$  sceglieremo il più grande insieme aperto di  $[0, T]$  tale che i coefficienti di  $P$  sono in  $G^{(\sigma)}(\mathcal{J} \times \mathbb{R}_{\chi}^n)$ .

Osserviamo che nel caso  $\mathcal{J} = [0, T]$  il risultato del teorema 3 si riduce alle ben note stime del fronte d'onda della soluzione per un operatore differenziale con caratteristiche di molteplicità costante e coefficienti

di classe di Gevrey in  $(t, x)$ .

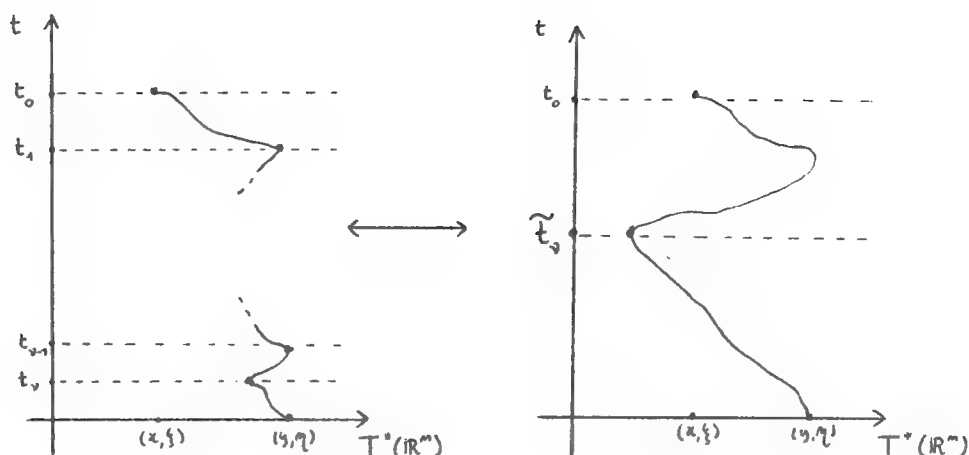
Discutiamo ora il significato geometrico delle ipotesi  $(I)_1$  ed  $(I)_2$ . Innanzitutto diremo equivalenti due traiettorie che abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Se vale una delle due alternative  $(I)_1$  o  $(I)_2$  allora si ha il seguente risultato:

**Proposizione 4.** Esiste una funzione  $A(t)$  di classe  $C^1$  con la sua inversa tale che ogni traiettoria di passo 1 nell'intervallo  $[t_{h+1}, t_{h-1}]$  con punto di diramazione  $t_h$   $[t_{h+1}, t_{h-1}]$  è equivalente alla traiettoria di passo 1 e punto di diramazione  $t_h^* = A^{-1}(A(t_{h+1}) - A(t_h) + A(t_{h-1}))$  per la quale gli indici  $j_h$  e  $j_{h+1}$  sono scambiati rispetto alla traiettoria considerata.



Così ogni traiettoria di passo  $l$  e punti di diramazione  $t_h, t_{h+1}, \dots, t_{h+l-1} \in [t_{h+l}, t_{h-1}] \setminus \mathcal{S}$  è equivalente ad una traiettoria di passo 1 e punto di diramazione  $t_h^* \in \mathcal{F}_l(t_{h+l}, t_{h-1})$  dove l'insieme  $\mathcal{F}_l(t_{h+l}, t_{h-1})$  è completamente caratterizzato da  $\mathcal{S}$ ,  $t_{h+l}$ ,  $t_{h-1}$  e dalla funzione  $A$ . Se  $\mathcal{F}(t) = \bigcup_{v=1}^{\infty} \mathcal{F}_v(0, t)$  allora la tesi del teorema 3 può essere riscritta in modo equivalente come segue:

$WF_{\sigma}(U(t, \cdot)) \subset \{ \text{punti finali delle traiettorie di passo 1 con punto di diramazione in } \mathcal{F}(t) \text{ e punto iniziale in } WF_{\sigma}(G) \} \cup \{ \text{punti finali di traiettorie di passo zero con punto iniziale in } WF_{\sigma}(G) \}^{\text{con}}.$



Non daremo qui la dimostrazione del teorema 2 che può essere ottenuta con opportuni regolarizzanti dei simboli  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  usando argomenti simili a quelli di [I].

La dimostrazione del teorema 3 fa uso di una parametrice del problema (C.P.)<sub>S</sub> rappresentata per mezzo di operatori integrali di Fourier con ampiezze in  $S^{m, \sigma, \sigma}$  costruite col metodo delle equazioni del trasporto. In quanto segue esporremo le idee principali di questa costruzione.

#### Prodotto di fasi

Per  $\phi_1(t, s)$  e  $\phi_2(t, s)$  soluzioni delle equazioni eiconali

$$\begin{cases} \partial_t \phi_j(t; s; x, \xi) = \lambda_j(t, x, \nabla_x \phi_j) \\ \phi_j(s, s) = x \cdot \xi \end{cases} \quad j=1,2$$

definiamo il prodotto  $\phi_{i,j}(t, t_1, s)$  delle fasi  $\phi_i(t, t_1)$  e  $\phi_j(t_1, s)$  come la soluzione della equazione

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_{i,j}(t, t_1, s; x, \xi) = \lambda_i(t, x, \nabla_x \phi_{i,j}) & , \quad t \in [t_1, s], \\ \phi_{i,j}(t_1, t_1, s) = \phi_j(t_1, s). \end{cases}$$

Le proprietà che useremo sono le seguenti (si vedano [K] e [T]):

$$(1) \quad \phi_{i,j}(t, s, s) = \phi_i(t, s) \quad , \quad \phi_{i,j}(t, t, s) = \phi_j(t, s).$$

(2) La trasformazione canonica generata da  $\phi_{i,j}$

$$(x, \xi) = T_{i,j}(t, t_1, s; (y, n)) \text{ definita da}$$

$$y = \nabla_{\xi} \phi_{i,j}(t, t_1, s; x, n) \quad , \quad \xi = \nabla_x \phi_{i,j}(t, t_1, s; x, n)$$

è quella che ad  $(y, n)$  fa corrispondere il punto finale della traiettoria  $(x(\tau), \xi(\tau))$  di passo 1 in  $[s, t]$  con punto di diramazione  $t_1$ ,  $t=t_0 \geq t_1 \geq t_2=s$ , punto iniziale  $(y, n)$ , che risolve

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_{\xi} \lambda_i(\tau, x, \xi); \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \nabla_x \lambda_i(\tau, x, \xi) \text{ su } [t_1, t_0]$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_{\xi} \lambda_j(\tau, x, \xi); \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \nabla_x \lambda_j(\tau, x, \xi) \text{ su } [t_2, t_1].$$

(3) Se  $(x^1, n^1) = (x(t_1), \xi(t_1))$  è il valore per  $\tau=t_1$  della traiettoria di cui al punto (2) allora  $(x^1, n^1)$  risolve l'equazione

$$\begin{cases} x^1 = \nabla_{\xi} \phi_i(t, t_1; x, n^1) \\ n^1 = \nabla_x \phi_j(t_1, s; x^1, n) \end{cases} \quad . \text{ con } (x, n) \text{ come parametro e vale}$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}(t, t_1, s; x, \eta) &= \phi_i(t, t_1; x, \eta^1) - x^1 \cdot \eta^1 + \phi_j(t_1, s; x^1, \eta) . \\ (4) \quad \partial_{t_1} \phi_{i,j}(t, t_1, s) &= \lambda_j(t_1, x^1, \eta^1) - \lambda_i(t_1, x^1, \eta^1) . \end{aligned}$$

Se assumiamo una delle ipotesi  $(I)_1$  e  $(I)_2$  possiamo inoltre provare con argomenti simili a quelli di [M]:

$$(5) \quad \phi_{i,j}(t, t_1^*, s) = \phi_{j,i}(t, t_1, s)$$

con  $t_1^* = A^{-1}(A(s) - A(t_1 + A(t)))$  ed  $A$  la funzione introdotta nella proposizione 4.

La proprietà (2) chiarisce come si propaga il fronte d'onda di una ultradistribuzione sotto l'azione di un operatore integrale di Fourier con fase  $\phi_{i,j}$  omogenea.

Per mezzo di (1), (2) e (4) possiamo provare il seguente teorema con successive integrazioni per parti.

Teorema 5. Assumiamo l'ipotesi  $(S.H.)_s$  per  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  omogenee.

Consideriamo  $E(t, s) = \int_s^t F(t, t_1, s) dt_1$  dove  $F(t, t_1, s)$  è un operatore integrale di Fourier con fase  $\phi_{i,j}(t, t_1, s)$  ed ampiezza  $f(t, t_1, s) \in C([s, t]; S^{\infty, \sigma, \mu}) \cap \Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{J}(s, t); S^{\infty, \sigma, \mu})$ ,  $\mathcal{J}(s, t)$  aperto di  $[s, t]$ . Vale allora per  $g \in G_0^{(\sigma)'}(R_x^n)$

$WF_\sigma(Eg) \subset \{ \text{punti finali traiettorie di passo zero su } [s, t] \text{ e punto iniziale in } WF_\sigma(g) \} \cup \{ (x, \xi); (x, \xi) = T_{i,j}(t, t_1, s; y, \eta), t_1 \notin \mathcal{J}(s, t), (y, \eta) \in WF_\sigma(g) \}^{con}$ .

#### Equazioni del trasporto

Assumiamo qui tutte le ipotesi del teorema (3) per il problema ivi considerato. Vogliamo costruire una  $\mathcal{E}(t, s)$  tale che

$$\begin{cases} L\mathcal{E}(t,s) = \text{operatore } \sigma\text{-regolarizzante} \\ \mathcal{E}(s,s) = I \text{ (matrice identità di ordine 2)}. \end{cases}$$

Esattamente come in [CZ] possiamo costruire  $E_j(t,s)$  parametriche di  $D_t - \lambda_j + c_{jj}$ ,  $j=1,2$ , rappresentata come un operatore integrale di Fourier con fase  $\phi_j(t,s)$  ed ampiezza  $e_j(t,s) \in C([0,T]^2; S^{\infty,\sigma,\sigma})$  data come sviluppo asintotico (\*)  $e_j \sim \sum_{\ell \geq 0} e_j^\ell$ , usando il metodo delle equazioni del trasporto. (Si veda anche [CM] per il caso  $\lambda_j=0$ ).

Cerchiamo poi la  $\mathcal{E}(t,s)$  sotto la forma stabilita a priori:

$$\mathcal{E}(t,s) = \begin{bmatrix} E_1(t,s) + \int_s^t F_1(t,t_1,s) dt_1 & \int_s^t F_2(t,t_1,s) dt_1 \\ \int_s^t G_1(t,t_1,s) dt_1 & E_2(t,s) + \int_s^t G_2(t,t_1,s) dt_1 \end{bmatrix}$$

dove  $F_j(t,t_1,s)$  è un F.I.O. con fase  $\phi_{1,2}(t,t_1,s)$ ,  $j = 1,2$  e

$G_j(t,t_1,s)$  è un F.I.O. con fase  $\phi_{2,1}(t,t_1,s)$ ,  $j = 1,2$ .

Le rispettive ampiezze verranno determinate come sviluppi asintotici in  $S^{\infty,\sigma,\sigma}$ :

$$f_j(t,t_1,s) \sim \sum_{\ell \geq 0} f_j^\ell(t,t_1,s), \quad g_j(t,t_1,s) \sim \sum_{\ell \geq 0} g_j^\ell(t,t_1,s), \quad j=1,2.$$

Ricordiamo che per i risultati provati in [CZ], la composizione di un operato-

---

(\*) Si rimanda a [CZ] per la definizione precisa di sviluppo asintotico in  $S^{\infty,\sigma,\mu}$ .

re pseudo differenziale con simbolo  $p^1(x, \xi) \in S^{\infty, \sigma, 1}$  e di un F.I.O. con fase  $\phi \in S^{1, \sigma, \sigma}$  ed ampiezza  $p^2(x, \xi) \in S^{\infty, \sigma, \sigma}$  è data mod. operatori  $\sigma$ -regolarizzanti, da un F.I.O. con la medesima fase  $\phi$  ed ampiezza  $q(x, \xi) \in S^{\infty, \sigma, \sigma}$  per la quale vale lo sviluppo

$$q(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_j(x, \xi),$$

$$q_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = j} \alpha!^{-1} D_y [D_\xi^\alpha p^1(x, \tilde{\nabla}_x \phi(x, y, \xi)) p^2(y, \xi)]_{y=x}$$

$$\text{dove } \tilde{\nabla}_x \phi(x, y, \xi) = \int_0^1 \nabla_x \phi(y + \theta(x-y), \xi) d\theta.$$

Ricordiamo inoltre che un simbolo di  $S^{\infty, \sigma, \mu}$  con sviluppo asintotico nullo è nella classe  $R^\sigma$  e che ogni F.I.O. con ampiezze in  $R^\sigma$  è un operatore  $\sigma$ -regolarizzante. Facendo agire  $L$  su  $\mathcal{E}(t, s)$  e tenuto conto delle proprietà (1) e (5) di pag. 13 e 14, arriviamo così a considerare le seguenti equazioni del trasporto:

$$(T_0) \quad \begin{cases} D_t f_j^\circ + \sum_{h=1}^n a_h^1(t, t_1, s) D_{x_h} f_j^\circ + q_1(t, t_1, s) f_j^\circ + b_1(t, t_1, s) \theta g_j^\circ = 0 \\ D_t g_j^\circ + \sum_{h=1}^n a_h^2(t, t_1, s) D_{x_h} g_j^\circ + q_2(t, t_1, s) g_j^\circ + b_2(t, t_1, s) \theta f_j^\circ = 0, \quad j=1, 2, \\ f_1^\circ(t_1, t_1, s) = 0, \quad f_2^\circ(t_1, t_1, s) = \tilde{e}_2(t_1, s), \quad g_1^\circ(t_1, t_1, s) = \\ = \tilde{e}_1(t_1, s), \quad g_2^\circ(t_1, t_1, s) = 0 \end{cases}$$

$$(T_\ell) \quad \begin{cases} D_t f_j^\ell + \sum_{h=1}^n a_h^1(t, t_1, s) D_{x_h} f_j^\ell + q_1(t, t_1, s) f_j^\ell + b_1(t, t_1, s) \theta g_j^\ell = r_j^\ell(t, t_1, s) \\ D_t g_j^\ell + \sum_{h=1}^n a_h^2(t, t_1, s) D_{x_h} g_j^\ell + q_2(t, t_1, s) g_j^\ell + b_2(t, t_1, s) \theta f_j^\ell = s_j^\ell(t, t_1, s) \\ g_j^\ell(t_1, t_1, s) = f_j^\ell(t_1, t_1, s) = 0, \quad j=1,2, \quad \ell \geq 1. \end{cases}$$

Qui l'operatore  $\theta$  è definito da  $\theta h(t, t_1, s) = h(t, t_1^*, s) \partial_{t_1} t_1^*$ , con  $t_1^*$  come in (5) a pag. 14,  $a_h^1, a_h^2 \in C([0, T]^3; S^{0, \sigma, \sigma})$ ,  $q_1, q_2, b_1, b_2 \in C([0, T]^3; S^{a, \sigma, \sigma})$ , ( $\sigma$  e  $q$  come in (W.P.)<sub>s</sub>), i simboli  $r_j^\ell$  ed  $s_j^\ell$  sono determinati univocamente da  $L$  e da  $f_j^k, g_j^k$  con  $0 \leq k \leq \ell-1$  e costituiscono i termini di quattro sviluppi asintotici  $\sum_{\ell \geq 0} r_j^\ell, \sum_{\ell \geq 0} s_j^\ell, j=1,2$ , in  $C([0, T]^3; S^{\infty, \sigma, \sigma})$ .

Infine in  $(T_0)$  i simboli  $\tilde{e}_j(t, s) \in C[0, T]^2; S^{\infty, \sigma, \sigma})$  sono determinati da  $e_j(t, s)$  e dai termini di  $L$ . Vale il seguente:

**Teorema 6.** Le soluzioni dei problemi  $(T_0)$  e  $(T_\ell)$  per  $\ell=1,2,\dots$ , esistono e definiscono lo sviluppo asintotico di ampiezze in

$$C([0, T]^3; S^{\infty, \sigma, \sigma}) \cap \Gamma^{(\sigma)}(\mathcal{J}(s, t); S^{\infty, \sigma, \sigma})$$

dove  $\mathcal{J}(s, t)$  è il complementare di  $\mathcal{F}(s, t) = \bigcup_{v=1}^{\infty} \mathcal{F}_v(s, t)$ ;  $\mathcal{F}_v(s, t)$ , come a pag. 14, denota l'insieme dei punti di diramazione delle traiettorie di passo 1 su  $[s, t]$  che si ottengono semplificando le traiettorie di passo  $v$  con diramazioni in  $[s, t] \setminus \mathcal{J}$  a traiettorie equivalenti.

Il teorema 3 può così essere provato tramite la proposizione 4, i teoremi 5 e 6.



BIBLIOGRAFIA (In ordine di citazione)

- [CDeGS] F. COLOMBINI, E. De GIORGI, G. SPAGNOLO, Sur les equations hyperboliques avec des coefficients qui ne dependent que du temps. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 6 (1979), 511-559.
- [CJS] F. COLOMBINI, E. JANNELLI, S. SPAGNOLO, Well-posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a non-strictly hyperbolic equation with coefficients depending on time. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 10 (1983), 291-312.
- [N] T. NISHITANI, Sur les equations hyperboliques à coefficients qui sont hölderiens en t et de la classe de Gevrey in x. Bull. de Sc. Math. 107 (1983), 113-138.
- [CT] Y. OHYA, S. TARARA, Le problem de Cauchy a caracteristiques multiples dans la classe de Gevrey-coefficients hölderiens en t. In corso di pubblicazione.
- [B] M.D. BRONSHTEN, The Cauchy problem for hyperbolic operators with variable multiple characteristics. Trudy Moskov. Mat. Obsi., 41 (1980), 83-99.
- [W] S. WAKABAYASHI, Singularities of solutions of the Cauchy problem for hyperbolic systems in Gevrey classes. Japan J. Math. 11 (1985), 157-201.
- [Mz.] S. MIZOHATA, Propagation de la regularité au sense de Gevrey pour les operateurs differentiels a multiplicité constante. Sem. Eq. aux derives partielles hyp. et holomorphes, Hermann Paris, 1984.
- [T] K. TANIGUCHI, Fourier integral operators in Gevrey class on  $\mathbb{R}^n$  and the fundamental solution for a hyperbolic operator. Publ. R.I.M.S. Kyoto Un. 20 (1984), 491-542.

- [C] M. CICOGNANI, On the propagation of singularities for hyperbolic operators with coefficients irregular in time. In corso di pubblicazione.
- [MT] Y. MORIMOTO, K. TANIGUCHI, Propagation of wave front sets of solutions of the Cauchy problem for hyperbolic equations in Gevrey classes. Osaka J. of Math. Dicembre '86.
- [CZ] L. CATTABRIGA, L. ZANGHIRATI, Fourier integral operators of infinite order on Gevrey spaces. Applications to the Cauchy problem for hyperbolic operators. In corso di pubblicazione.
- [I] W. ICHINOSE, Propagation of singularities for a hyperbolic equation with non-regular characteristic roots. Osaka J. of Math. 17 (3) (1980), 703-750.
- [K] H. KUMANO-GO, Pseudo differential operators. M.I.T. Press, 1982.
- [M] Y. MORIMOTO, Fundamental solution for a hyperbolic equation with involutive characteristics of variable multiplicity. Comm. in part. diff. eq. 4 (6), (1979), 609-643.
- [CM] L. CATTABRIGA, D. MARI, On a Cauchy problem in Gevrey spaces. In corso di pubblicazione.